

《离散数学》课程思政教学案例

周庆忠（华东交通大学软件学院）

一、课程基本信息			
课程名称	离散数学	课程总学时	48
相关教学内容	第4章 4.5 等价关系	教学内容时长	2
参考教材	离散数学（修订版）邓毅雄 江西高校出版社	课程教学对象	软件工程一年级本科生
二、案例简介			
题目： 4.5 等价关系			
简介： 本节主要研究等价关系的定义、等价类的求法、集合的划分。可以联系生活中的实际问题引入介绍，让具体的应用实例唤起学生的学习兴趣和学习投入，做到知行合一，应用新知识分析解决应用问题。			
案例设计目标	知识目标	1) 掌握等价关系定义及判定； 2) 掌握等价类的定义以及商集的定义； 3) 掌握集合的划分以及与等价关系之间的联系。	
	能力目标	1) 能判断一个关系是不是等价关系； 2) 能根据等价关系求取等价类； 3) 能够运用等价关系的性质理解和描述复杂工程问题，能够建立和分析模型，并利用模型解决问题，培养问题求解能力； 4) 通过拓展阅读开阔知识视野，培养自学能力。	
	思政目标	1) 培养逻辑思维抽象思维能力，提高数学素养。 2) 培养严谨的治学态度，知行合一。 3) 培养学生团结协作精神、勇于探索的工匠精神。	
学习重点	(1) 等价关系的定义； (2) 等价类的求法； (3) 集合的划分。		

学习难点	<p>(1) 等价关系的判定;</p> <p>(2) 等价类求法;</p> <p>(3)等价关系与划分的相互诱导。</p>	
教学方法	实例导入	<p>回顾二元关系的 5 种重要性质, 从生活中的等价关系实例引入分析该关系具有哪些重要性质, 引入等价关系的定义, 引起学生的学习兴趣和学习热情, 培养勇于探索的精神, 激发探索新知的动力, 同时培养学生应用所学知识分析解决问题的能力, 做到知行合一。</p>
	启发式教学	<p>1、提出问题: 一个大学里同属一个学院的学生关系, 具有上述哪些性质? 指出具备这三种性质的关系 (自反、对称、传递性质) 是一种特殊的二元关系——等价关系。</p> <p>2、请同学们举例, 你所认为的等价关系有哪些?</p> <p>3、简单介绍等价关系的一些重要应用 (例如现代数字通信系统的可靠性与保密性、RSA 密码系统、程序语言编译、矩阵分类、模式分类等领域), 唤起学生浓厚的学习兴趣与探索新知的热情。</p>
主要思政元素	<p>1、思政素材:</p> <p>1) 社会主义核心价值观里的平等含义: “平等指的是公民在法律面前的一律平等”, 这种公民与公民之间的平等关系也是一种等价关系;</p> <p>2) 各个具体的等价关系都是基于某一集合上的二元关系且均具有自反、对称和可传递三个性质, 将它们的这种共性抽象出来就是等价关系的定义, 从而实现了从特殊到一般的抽象。由此可见, 等价关系实质上是对相应集中的具有同一性的对象即具有共性特征的对象的一种抽象, 从认识论的角度来看, 这符合从特殊到一般的认识规律;</p> <p>2、思政切入点: 等价关系引入。</p>	
案例教学意义	<p>1、离散数学内容丰富但相对抽象, 加之学生对其广泛的应用不了解, 因而对该课程价值缺乏应有的认识, 不够重视, 甚至排斥它, 心理上感觉学习较困难, 提不起足够的学习兴趣。因此, 教学时, 从知识背景相关应用出发, 了解它的应用价值, 以问题为导向, 启发和引导学生思维, 引发学生的求知欲与探索精神, 唤起学习兴趣与积极性。</p> <p>2、通过知识的学习讲解和应用, 让学生感悟数学之美, 培养提高学生的数学素养; 通过介绍等价关系的广泛应用, 塑造学生科技自立自强、勇于探索的工匠精神。</p> <p>3、通过挖掘和梳理其思政元素, 并将融入到教学环节, 实现思政教育和专业知识的有效统一。</p>	

三、课堂组织与实施

教学活动 1：导入等价关系定义（5 分钟）

先回顾上节二元关系的 5 种重要性质，如何判定？

【问题引入】请大家思考：

1、一个大学里同属一个学院的学生关系，具有上述哪些性质？

2、**社会主义核心价值观里的平等含义**：“平等指的是公民在法律面前的一律平等”，这种公民与公民之间的平等关系具有哪几种性质？

引导学生归纳这两种关系都具有的性质，指出具备这三种性质的关系（自反、对称、传递性质）是一种特殊的二元关系——等价关系。

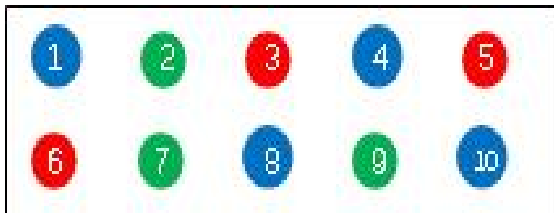
3、简单介绍等价关系的一些重要应用（例如现代数字通信系统的可靠性与保密性、RSA 密码系统、程序语言编译、矩阵分类、模式分类等领域），**唤起学生浓厚的学习兴趣与探索新知的热情，从而引入等价关系的定义引入新课。**

【课程思政元素】从贴近学生生活实例，引发学生的学习兴趣，唤醒学生学习热情，提高学生的家国情怀，增强中国特色社会主义道路自信，增强科技自立自强理念。

教学活动 2：等价关系定义（20 分钟）

【知识讲解】讲解定义 4.14 等价关系，结合例题 4.15，掌握等价关系的判定与证明。

练习 1、如右图所示，集合 $A = \{1, 2, \dots, 10\}$ 上定义关系 R 如下： $\langle x, y \rangle \in R \Leftrightarrow x$ 和 y 有相同的颜色。



- (1) 写出 R 中的所有元素。
- (2) 画出 R 的关系图。
- (3) 证明 R 是一个等价关系。

【引导归纳】各个具体的等价关系都是基于某一集合上的二元关系且均具有自反、对称和可传递三个性质，将它们的这种共性抽象出来就是等价关系的定义，从而实现了从特殊到一般的抽象。由此可见，**等价关系实质上是对相应集合中的具有同一性的对象即具有共性特征的对象的一种抽象，从认识论的角度来看，这符合从特殊到一般的认识规律。**

教学活动 3：等价类定义（20 分钟）

【提问与学生互动讨论】要求学生观察例题并讨论：与 1 等价的元素有哪些，与 2 等价的元素有哪些，与 3 等价的元素有哪些？俗话说“人以类聚，物以群分”，从而自然引入定义 4.15 等价类的概念。

【学生活动】学生听讲，根据问题进行思考或互动讨论，然后抢答回答。对

学生的积极讨论要及时互动反馈，并给予肯定，对首先发表正确回答的要鼓励。

【知识讲解】讲解定义 4.15 等价类的概念。强调等价类与等价关系的区别，首先让学生明白集合中某元素的等价类是该集合的一个子集，然后根据该集合上定义的等价关系去求该等价类的元素还有哪些。结合例题讲解如何求等价关系的等价类。

练习 2、 设 $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, R 是 A 上以 4 为模的同余关系。

- (1) 写出 R 中的所有元素。
- (2) 画出 R 的关系图。
- (3) 计算 R 的所有等价类。

【提问与学生互动讨论】请讨论归纳求等价类的方法？对积极发言的同学给予鼓励表扬。鼓励学生思考，提高课堂学习投入，提高新知识内容认知深度，强化语言逻辑表达能力。

【引导归纳】求等价类方法：对 A 中的任意元素 x ，找出以 x 为第一元素的所有序偶，将 x 与其所有的第二元素构成集合，这个集合就是 $[x]_R$ 。

教学活动 4：商集的概念 (15 分钟)

【知识讲解】讲解定理 4.11，定义 4.16，结合前面的例 4.15，求 A 在等价关系 R 下的商集。

【提问讨论】请大家思考：集合 A 在等价关系 R 下的商集是一个具有什么限制特点的集合？对积极回答的同学及时鼓励和表扬。

【引导归纳】商集中的元素是集合，这些元素都是等价关系 R 不交的等价类。

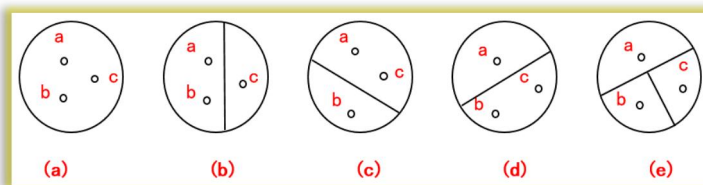
教学活动 5：集合上的等价关系与集合的划分 (30 分钟)

【知识讲解】讲解定义 4.17 集合的划分，强调划分是指定集合的若干不交的非空子集构成。结合实例介绍如何判断集合的划分。

【知识讲解】

练习 3、 设 $A = \{a,b,c\}$ ，求 A 上所有的划分与对应的等价关系及其商集。

解：所有划分如右图所示。



只有 1 个划分块的划分为 S_1 ，见

图(a)；具有 2 个划分块的划分为 S_2 、 S_3 和 S_4 ，见图(b)、(c)和(d)，具有 3 个划分块的划分为 S_5 ，见图(e)。

假设由 S_i 导出的对应等价关系为 R_i , $i=1,2,3,4,5$ ，则有：

$$R_1 = S_1 \times S_1 = A \times A, \quad A/R_1 = \{\{a,b,c\}\}$$

$$R_2 = \{a,b\} \times \{a,b\} \cup \{c\} \times \{c\} = \{\langle a,a \rangle, \langle a,b \rangle, \langle b,a \rangle, \langle b,b \rangle, \langle c,c \rangle\}, \quad A/R_2 = \{\{a,b\}, \{c\}\}$$

$$R_3 = \{a,c\} \times \{a,c\} \cup \{b\} \times \{b\} = \{\langle a,a \rangle, \langle a,c \rangle, \langle b,b \rangle, \langle c,a \rangle, \langle c,c \rangle\}, \quad A/R_3 = \{\{a,c\}, \{b\}\}$$

$$R_4 = \{b,c\} \times \{b,c\} \cup \{a\} \times \{a\} = \{\langle a,a \rangle, \langle b,b \rangle, \langle b,c \rangle, \langle c,b \rangle, \langle c,c \rangle\}, \quad A/R_4 = \{\{a\}, \{b,c\}\}$$

$$R_5 = \{a\} \times \{a\} \cup \{b\} \times \{b\} \cup \{c\} \times \{c\} = \{ \langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle \} = I_A, \quad A/R_5 = \{ \{a\}, \{b\}, \{c\} \}$$

【提出问题】 通过上面的练习，请分组讨论：给定集合 A 的一个划分 $\Pi = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ ，如何求由该划分确定的等价关系 R 。对于发言的同学给予鼓励称赞。

【引导归纳】 给定集合 A 的一个划分 $\Pi = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ ，可通过下式求划分 Π 诱导的等价关系 R ：

$$R = (A_1 \times A_1) \cup (A_2 \times A_2) \cup \dots \cup (A_n \times A_n).$$

【学生活动】 通过让学生观察、分组讨论，引导学生自主思考讨论如何求划分 Π 诱导的等价关系 R 。（引导学生合作讨论解决问题。从而培养学生团队精神和解决实际问题的能力）

【课外拓展】

1、对一个关系矩阵 A 表示的二元关系 R ，试编程实现：判定关系 R 是不是一个等价关系。

四、案例教学特色与实践效果

应用性	此次课程设计除了讲授等价关系基本知识之外，还介绍了等价关系在生活、通信、人工智能等领域的广泛应用。
拓展性	教学设计既尊重了知识体系，又不囿于知识体系，教学内容采用了广泛联系的观点，联系学生日常生活中相关的知识应用，帮助同学理解等价关系的基本知识，并引导学生将探究活动从课内引向课外，拓展知识视野和研究兴趣。

五、参考资料

1. 《离散数学（微课版）》王先庆、顾小丰、王丽杰，人民邮电出版社

2、拓展阅读：离散数学中的等价关系

<https://wenku.baidu.com/view/8b5333862fc58bd63186bceb19e8b8f67c1cef2c.html>

《离散数学》课程思政教学案例

周庆忠（华东交通大学软件学院）

一、课程基本信息			
课程名称	离散数学	课程总学时	48
相关教学内容	第7章 7.3 特殊群	教学内容时长	2
参考教材	离散数学（修订版）邓毅雄江西高校出版社	课程教学对象	软件工程一年级本科生
二、案例简介			
题目： 7.3 特殊群			
简介： 本节研究两类特殊群：循环群和置换群。循环群是最简单的群之一，它具有很多性质和应用，例如国际公认的较理想的 ElGam 公钥密码体制就是基于循环群中离散对数问题构建。变换群和置换群也有广泛应用，例如正 n 边形的对称性问题、早期的凯撒密码以及着色等问题中的应用，可以联系实际引入介绍，让具体的应用实例唤起学生的学习兴趣和学习投入。			
案例设计目标	知识目标	(1)掌握循环群的定义，判定，性质，生成元的计算； (2)掌握置换群的定义，置换的轮换分解和对换分解。	
	能力目标	(1)能够判断循环群与生成元的计算，能对置换进行轮换和对换分解，提高自主学习、探索、概括归纳能力； (2)能积极讨论问题、回答问题，提高逻辑思考、团队合作学习及语言表达等能力； (3)能够使用循环群、置换群理论解决实际应用问题，提高理论知识运用、创新等能力。	
	思政目标	(1)提升爱国主义情怀、民族自豪感。 (2)培养科学家执着探索、追求真理、敢于质疑猜想、勇于创新的精神。 (3)培养学生团结协作精神、勇于探索的工匠精神。	
学习重点	(1) 循环群的判定与生成元的计算； (2) 置换群的轮换表示。		
学习难点	(1)循环群生成元的计算； (2)置换群的轮换表示。		
教学方法	实例导入	从循环群、置换群的应用实例引入，引起学生的学习兴趣和学习热情，激发探索新知的动力。	

	启发式教学	<p>1、通过循环群定义的讲解阐述，启发提问：要判断一个群是否是循环群的关键是什么？继而引出例题：证明整数加法群是循环群，证明的过程也就是寻找计算生成元的过程。</p> <p>2、通过让学生观察、讨论正三角形的对称性，引导学生自主思考讨论对称的本质问题，引出对称群与置换群的讲解。</p> <p>3、对于置换的轮换表示，通过含有多个不动点的置换特例表示，提问置换的表示方法可否进一步简化？引出轮换和对换的概念。</p>
	演示教学法	引入正三角形对称性问题时，可将小动画引入课堂教学，更生动形象的展示对称的本质，加深学生对课堂内容的理解。

主要思政元素	<p>1、思政素材：</p> <p>1) 介绍中国群表示论奠基人--著名数学家段学复的事迹；</p> <p>2) 介绍群论在物理学中的应用；</p> <p>3) 从“宇称守恒”到“宇称不守恒”，介绍中国科学家杨振宁、华人科学家李政道的重要成就。</p> <p>2、思政切入点：</p> <p>循环群、对称群引入。</p>
--------	--

案例教学意义	<p>1、离散数学内容丰富但相对抽象，加之学生对其广泛的应用不了解，因而对该课程价值缺乏应有的认识，不够重视，甚至排斥它，心理上感觉学习较困难，提不起足够的学习兴趣。因此，教学时，从知识背景相关应用出发，了解它的应用价值，以问题为导向，启发和引导学生思维，引发学生的求知欲与探索精神，唤起学习兴趣与积极性。</p> <p>2、通过知识的学习讲解和应用，让学生感悟数学之美，培养提高学生的数学素养；通过了解中国数学家的事迹与成就贡献，增强民族自豪感，塑造学生科技自立自强、勇于探索的工匠精神。</p> <p>3、通过挖掘和梳理其思政元素，并将融入到教学环节，实现思政教育和专业知识的有效统一。</p>
--------	---

三、课堂组织与实施

教学活动 1：导入循环群概念（5 分钟）

先回顾上节群与子群的基本概念，如何判定？

【案例分析】从西北工业大学被网络攻击事件，指出保障网络信息安全的重要性和紧迫性，介绍基于循环群中离散对数问题构建的国际公认的较理想的

EIGam 公钥密码体制，从而引入循环群的概念。



接着，介绍我国群表示理论奠基人著名数学家段学复在循环群方面的成就。

院士展播 | 段学复：中国群表示论的奠基人

2022-04-26 07:31 - 三思未来



【课程思政元素】引发学生的学习兴趣，唤醒学生学习热情，提高学生的学习投入。通过介绍数学家段学复在循环群方面的成就，提升民族自豪感，激励学生自立自强，增强科技强国理念。

教学活动 2：循环群的基本概念（40 分钟）

【知识讲解】通过循环群定义的讲解阐述，启发提问：要判断一个群是否是循环群的关键是什么？

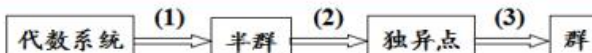
群： 设 $V = \langle G, \circ \rangle$ 是代数系统， \circ 是二元运算。

如果 \circ 在 G 上是可结合的，存在幺元 $e \in G$ ，

并且 G 中的任意元素 x 都有 $x^{-1} \in G$ ，

则称 $V = \langle G, \circ \rangle$ 为群。

如： $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$, $\langle \mathbb{R} - \{0\}, \times \rangle$, $\langle P(S), \oplus \rangle$, $\langle \mathbb{Z}_n, \oplus \rangle$ 是群，
但 $\langle \mathbb{N}, + \rangle$, $\langle M_n(\mathbb{R}), \circ \rangle$ 不是。



【提问与学生互动讨论】从循环群的定义出发，我们要判断一个群是否是循环群的关键是什么？

【学生活动】学生听讲，根据问题进行思考或互动讨论，然后抢答回答。

对学生的积极讨论要及时互动反馈，并给予肯定，对首先发表正确回答的要鼓励赞美其强大的数学素养和敏锐的洞察力。

【引导归纳】关键是如何寻找计算生成元。

【例题讲解】引出例题：证明整数加法群 $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ 是循环群，证明的过程也就是寻找计算生成元的过程。

【提问讨论】结合例题解题过程，请你归纳一下，计算生成元可分为哪几个步骤？

【引导归纳】计算生成元可分为如下 2 个步骤：

- 1) 假设生成元存在，并根据生成元的定义计算它；
- 2) 验证计算出来的元素是否是生成元，如果是，则该群是循环群。

【课程思政元素】鼓励学生思考，提高课堂学习投入，提高合作与竞争意识，提高新知识内容认知深度，强化语言逻辑表达能力。

教学活动 3：对称群与置换群的基本概念（30 分钟）

【知识讲解】对称群引入：设 A 是任意集合， $S_A = \{f|f \text{ 是 } A \text{ 上的变换}\}$ ，则 S_A 关于函数的复合运算构成的群称为 A 上的对称群。为什么称为对称群呢？这是由于此类群可描述事物的对称性。自然界和现实生活中，许多事物都有对称性，如图形中的等边三角形、机械系统中的对称结构、物理学中的晶体对称性等，群论的奠基人伽罗瓦利用方程复根的对称性原理，最终建立群论，解决了高次代数方程的求解问题。

“对称效应”在神秘无穷的“超自然界”也同样适用，有“对称即群”的说法，例如，群论在物理学中的应用，仅仅通过一个简单的对称性就得到了整个电磁学理论。无论是“经典物理”中的“对称性和守恒律”还是“量子力学”中的“角动量理论”，都闪烁着“群论”思想的夺目光芒。接着介绍从“宇称守恒定律”到由中国科学家杨振宁和美籍华人科学家李政道提出“宇称不守恒定律”的发展变化，指出科学家追求真理、大胆质疑猜想、勇于探索创新的精神。

【知识讲解】讲解定义 7.14： n 元置换的概念，结合实例加深理解，指出置换群是 n 次对称群的子群。

【提出问题】 n 个元素的集合 S ，可以有多少个这种置换？对积极思考回答的学生代表给予鼓励。

【知识讲解】任何 n 元置换都可以用不交的轮换之积来表示。请观察下面两个置换的特点：

$$\text{置换 } \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{置换 } \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

【提出问题】：请观察这些置换的表示，其元素的出现有没有什么特点或规律？（及时对于发现轮换、替换特点的同学给予肯定、称赞）

【引导归纳】：会发现有些元素会发生轮换（这些元素类似循环替换），有些元素是两两对换，有些元素没有发生替换。

【提出问题】：能否把一个置换进一步简化表示？让置换的结构更清晰。一个比较自然的想法是把那些形成一个循环轮换的元素按替换先后顺序写在一起做成一组置换，对换的元素写在一起做成一组置换，不发生替换的元素可以省略

不写。引出轮换、对换的概念。

【学生活动】通过让学生观察、分组讨论，引导学生自主思考讨论如何把一个置换表示为轮换之积。（引导学生合作讨论解决问题。从而培养学生团队精神和解决实际问题的能力）

教学活动 4：对称群与置换群的基本概念（15 分钟）

【知识讲解】讲解定义 7.15 置换的复合概念，结合例 7.10 加深理解求置换的复合的方法。

四、案例教学特色与实践效果

直观性	为了帮助学生理解对称群，教师在课件中可使用动画演示，直观地呈现了对称群的基本思想。
应用性	此次课程设计除了讲授特殊群基本知识之外，还介绍了特殊群在生活、通信、物理等领域的广泛应用。
拓展性	教学设计既尊重了知识体系，又不囿于知识体系，教学内容采用了广泛联系的观点，联系学生日常生活中相关的知识应用，帮助同学理解特殊群的基本知识，并引导学生将探究活动从课内引向课外，拓展知识视野和研究兴趣。

五、参考资料

1. 《离散数学（微课版）》王先庆、顾小丰、王丽杰，人民邮电出版社
2. 拓展阅读：宇称不守恒定律

<https://baike.baidu.com/item/%E5%AE%87%E7%A7%B0%E4%B8%8D%E5%AE%88%E6%81%92%E5%AE%9A%E5%BE%8B/4811059?fr=aladdin>

《离散数学》课程思政教学案例

周庆忠（华东交通大学软件学院）

一、课程基本信息			
课程名称	离散数学	课程总学时	48
相关教学内容	第9章 9.1 图的基本概念	教学内容时长	2
参考教材	离散数学（修订版）邓毅雄江西高校出版社	课程教学对象	软件工程一年级本科生
二、案例简介			
题目： 9.1 图的基本概念			
简介： 本节主要研究了解图论的起源和图论的基本概念，可以联系生活中的实际问题引入介绍，让具体的应用实例唤起学生的学习兴趣和学习投入，做到知行合一，应用新知识分析解决应用问题。			
案例设计目标	知识目标	1) 了解图论的起源和图论的基本概念； 2) 掌握顶点的度和点子集的度，以及重点掌握握手定理及握手定理的相关应用； 3) 理解掌握图同构的概念与判定。	
	能力目标	1) 能够掌握图的基本概念和图的表示； 2) 能掌握握手定理及其推论的内容，并且能灵活地应用； 3) 能应图论的基本知识理解与描述复杂工程问题，建立模型解决实际问题，培养应用创新能力； 4) 能积极讨论问题、回答问题，提高逻辑思维、团队合作学习及语言表达等能力； 5) 通过拓展阅读开阔知识视野，培养自学能力。	
	思政目标	1) 感悟数学之美，培养逻辑思维能力、抽象思维能力和创新精神，提高数学素养。 2) 通过介绍科学家的事迹，培养学生的人文思想和人文精神，铸就优秀的道德品质，塑造正确的价值观和人生观。 3) 通过了解中国数学家的事迹与成就贡献，增强民族自豪感，坚定文化自信，塑造学生科技自立、勇于探索的工匠精神。	

学习重点	(1) 图论的基本概念及分类; (2) 握手定理; (3) 图同构的判断与证明。	
学习难点	(1) 握手定理及其应用; (2) 图同构的判断与证明。	
教学方法	实例导入	从生活中的实例引入讲解图论的基本概念, 讲练结合, 及时解决学生练习时遇到的问题, 引起学生的学习兴趣和热情, 培养勇于探索的精神, 激发探索新知的动力, 同时培养学生应用所学知识分析问题解决问题的能力, 做到知行合一。
	启发式教学	1、提出问题: 同学们生活中接触过哪些与图有关的实例? 它们各用于解决了什么问题? 2、简单介绍图的一些重要应用 (例如交通图、网络、电路设计、人际社交关系、控制论、人工智能等领域, 几乎所有的科学问题都可以利用图模型进行求解), 唤起学生浓厚的学习兴趣与探索新知的热情。
主要思政元素	1、思政素材: 1) 通过简介我国科学家在图论方面的成就, 培养学生的人文思想和人文精神, 铸就优秀的道德品质, 塑造正确的价值观和人生观, 提升民族自豪感, 坚定文化自信, 激发学生爱国热情; 2) 讲述图论之父-欧拉的故事, 欧拉在双目失明的情况下仍然坚持科学研究, 为人类留下了宝贵的精神财富, 培养优秀的道德品质、献身科学精神; 2、思政切入点: 图论的引入。	
案例教学意义	1、 离散数学内容丰富但相对抽象, 加之学生对其广泛的应用不了解, 因而对该课程价值缺乏应有的认识, 不够重视甚至排斥它, 心理上感觉学习较困难, 提不起足够的学习兴趣。因此, 教学时, 从知识背景相关应用出发, 了解它的应用价值, 以问题为导向, 启发和引导学生思维, 引发学生的求知欲与探索精神, 唤起学习兴趣与积极性。 2、 通过知识的学习讲解和应用, 让学生感悟数学之美, 培养提高学生的数学素养; 通过介绍图论的广泛应用, 塑造学生科技自立自强、勇于探索的工匠精神, 用理论指导实践, 做到知行合一。 3、 通过挖掘和梳理其思政元素, 并将融入到教学环节, 实现思政教育和专业知识的有效统一。	

三、课堂组织与实施

教学活动 1：图论新课引入（5 分钟）

【问题引入】

1、请大家举例：生活中你接触过哪些与图有关的问题和应用？通过同学的回答引入图论的概念。

2、图论中所谓的图是指某类具体离散事物集合和该集合中的每对事物间以某种方式相联系的数学模型，简介图论发展史，指出许多实际问题都可以抽象为图这种数学模型，如交通图、网络、电路设计、人际社交关系、控制论、人工智能等，几乎所有的科学问题都可以利用图模型进行求解。唤起学生浓厚的学习兴趣与探索新知的热情，唤起学生浓厚的学习兴趣与探索新知的热情，从而引入新课。

3、简介欧拉、迪杰斯特拉及我国科学家江泽涵、管梅谷的故事，培养学生的人文思想和人文精神，铸就优秀的道德品质，塑造正确的价值观和人生观，提升民族自豪感，坚定文化自信，激发学生爱国热情。



莱昂哈德·欧拉



艾兹格·W·迪杰斯特拉



江泽涵



管梅谷

【课程思政元素】从图论贴近学生生活应用实例，引发学生的学习兴趣，唤醒学生学习热情，通过介绍我国科学家相关事迹，培养优秀道德品质，提高学生的家国情怀，增强文化自信，增强科技自立自强理念。

教学活动 2：图的基本概念、表示方法（30 分钟）

【知识讲解】讲解图论基本概念定义 9.1 图的顶点、边的概念与图的表示，结合例题加深理解掌握。

【提问与学生互动讨论】图的集合表示与图形表示的相互转换方法。（对积极讨论的氛围进行表扬，对积极发言的学生代表及时鼓励）

【学生活动】学生听讲，根据问题进行思考或互动讨论，然后抢答回答。对学生的积极讨论要及时互动反馈，并给予肯定，对首先发表正确回答的要鼓励。

【引导归纳】图 $G = \langle V, E \rangle$ 的集合表示与图形表示相互转换的方法：

(1) 集合表示转换为图形表示。用小圆圈表示 V 中的每一个结点，结点位置可随意放，元素 $\langle u, v \rangle$ 用由 u 指向 v 的有向边表示，元素 (u, v) 用 u 与 v 相连的无

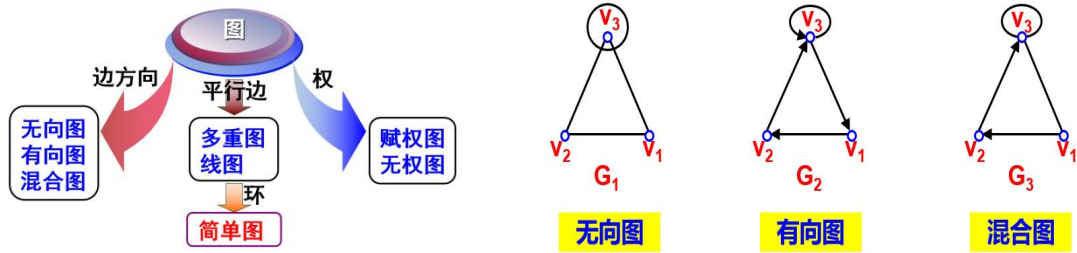
向边表示。

(2) 图形表示转换为集合表示。图中的所有结点构成结点集，图中的无向边用无序偶对表示，有向边用序偶表示，注意箭头指向的结点是序偶的第二元素。

【知识讲解】讲解定义 9.2 结点的度的相关概念。结合例子加深理解。

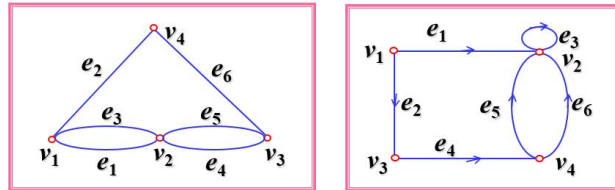
教学活动 3：图的分类（10 分钟）

【知识讲解】讲解图的分类，结合实例加深理解。



教学活动 4：图的握手定理与应用（20 分钟）

【提问与学生互动讨论】要求大家观察下图并讨论：下面的两个图，其边数与度数是多少？请猜想图的度数与边数有什么数量关系？（对学生积极表现进行表扬和鼓励）



【知识讲解】由上面学生的讨论，自然引入讲解图的握手定理 9.1 及推论，结合例题 9.4、9.5 理解其应用。

【提问与学生互动讨论】请讨论归纳：握手定理的应用。

【总结归纳】握手定理的应用：

- (1) 所有结点度数的总和等于边数的 2 倍。
- (2) 奇度数结点的个数一定是偶数。
- (3) 有向图中各结点的出度之和等于各结点的入度之和，等于边数。

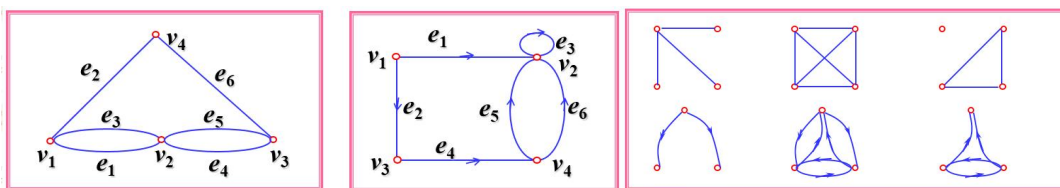
【课程思政元素】鼓励学生思考，提高课堂学习投入，提高合作与竞争意识，提高新知识内容认知深度，强化语言逻辑表达能力。

【知识讲解】讲解定理 9.2、9.3，结合实例加深理解。

教学活动 5：图的子图与补图（10 分钟）

【引导启发】联系我们以前学习过的集合的子集、补集的概念，由图的集合（顶点集和边集）表示，我们的图也有子图和补图的概念。引入讲解定义 9.6、

9.7 子图、补图的相关概念。结合例题加深理解。

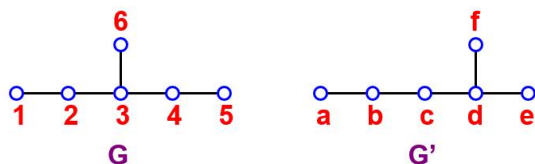


教学活动 6：图同构的概念和判断方法（15 分钟）

由于图的结点位置和结点与边的标记可以不同，故一个图的图形表示不一定是唯一的，但图的结构与性质一样，联系类比同构关系的概念，我们可以定义图的同构。

【知识讲解】讲解定义 9.8 图的同构概念，结合例题加深理解图同构的三个必要条件：节点数相同、边数相等、度数相同的结点数相等。

举个反例，说明这三个条件不是充分条件。



注意：图同构的三个必要条件不是充分条件。在上图的 G 与 G' 两个图，虽然满足以上三个条件，但不同构。

指出：寻找一种简单而有效的方法来判断图的同构，是图论中一个重要而未解决的问题。

【知识讲解】

练习：证明下图中， $G \cong G'$ 。

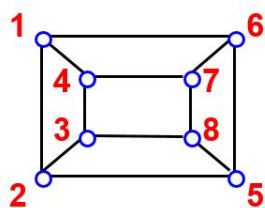


图 G

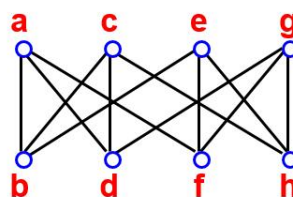


图 G'

证明：构造结点之间的双射函数 g 如下：

$$g(1) = a, \quad g(2) = b, \quad g(3) = c, \quad g(4) = d$$

$$g(5) = e, \quad g(6) = f, \quad g(7) = g, \quad g(8) = h$$

容易验证， g 满足同构的定义，所以 $G \cong G'$ 。

【提问与学生互动讨论】如何判断图的同构？图不同构？（对讨论的积极氛围及时表扬，对积极发言的学生代表鼓励）

【引导归纳】

(1) **图同构的判断：**找到结点集之间的双射，满足两结点间有边当且仅当它们

的函数值间有边并且方向和重数一致。

(2) 图不同构的判断:

至少满足下列情况之一的两个图是不同构的。

- (a) 结点数目不同。
- (b) 边数不同。
- (c) 度数相同的结点数不同。
- (d) 有两个度数相同的结点的邻接点的度数不完全相同。

【学生活动】通过让学生观察、分组讨论,引导学生自主思考讨论如何判断图的同构、图不同构。(引导学生合作讨论解决问题。从而培养学生团队精神和解决实际问题的能力)

四、案例教学特色与实践效果

直观性	借助图的直观性进行知识点的讲解,练习中结合图形的直观性加深知识的理解。
应用性	此次课程设计除了讲授图论的基本知识之外,还介绍了交通、网络、电路设计、人际社交关系、控制论、人工智能等领域的广泛应用。
拓展性	教学设计既尊重了知识体系,又不囿于知识体系,教学内容采用了广泛联系的观点,联系学生日常生活中相关的知识应用,帮助同学理解图论的基本知识,并引导学生将探究活动从课内引向课外,拓展知识视野和研究兴趣。

五、参考资料

1.《离散数学(微课版)》王先庆、顾小丰、王丽杰,人民邮电出版社

2、拓展阅读:

(1) 从七桥问题开始:全面介绍图论及其应用

<https://baijiahao.baidu.com/s?id=1594654125138224284&wfr=spider&for=pc>

(2) Erdos 的传说

<https://www.docin.com/p-280230212.html&endPro=true>

(3) 中国邮递员问题

<https://baike.baidu.com/item/%E4%B8%AD%E5%9B%BD%E9%82%AE%E9%80%92%E5%91%98%E9%97%AE%E9%A2%98/11055168?fr=aladdin>